

1. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках D и E , соответственно. Пусть ω_1 и ω_2 — окружности, вписанные в треугольники APD и CPE , где P — точка пересечения отрезков AE и CD . Отличные от сторон касательные к ω_1 и ω_2 , проведенные из точки B , пересекают отрезки AE и CD в четырех точках, лежащих на одной окружности. Докажите, что окружности ω_1 и ω_2 равны.

2. Семь комплексных чисел имеют равные ненулевые модули, а их сумма, сумма их квадратов и сумма их кубов равны 0. Докажите, что эти семь чисел лежат в вершинах правильного семиугольника.

3. Может ли разность кубов двух линейных функций быть квадратным трехчленом, имеющим корни?

4. Докажите, что все целые числа можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые два числа, отличающиеся на m или на n , были разноцветными.

5. На плоскости даны $3n + 2$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать такую точку, что среди расстояний от нее до остальных $3n + 1$ точек есть хотя бы $n + 1$ различное.

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n , что число $n! - 1$ составное.

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC , а точка D — пересечение внешней биссектрисы угла A с прямой BC . Описанная окружность треугольника ADM пересекает вторично сторону AC и продолжение стороны AB в точках E и F , соответственно. Точка N — середина EF . Докажите, что прямые AD и MN параллельны.

8. a_0, a_1, a_2, \dots — бесконечная последовательность положительных чисел. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $1 + a_n > a_{n-1} \sqrt[n]{2}$.

9. Расстановка чисел ± 1 в таблице 2007×2007 называется *миниатюрной*, если сумма чисел в любом квадрате, лежащем в таблице, равна -1 , 0 или 1 . Найдите количество миниатюрных расстановок.

10. Миша нарисовал на доске треугольник ABC и отметил его ортоцентр H . Оказалось, что на стороне AC существует точка X такая, что $XC = XH = XA/2$. Хулиган Андрей стер весь треугольник, кроме точек A и H . Помогите Мише восстановить его при помощи циркуля и линейки.

Третий тур. Премьер–лига.

22 сентября 2007 г.

1. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC , пересекает стороны AB и BC в точках D и E , соответственно. Пусть ω_1 и ω_2 — окружности, вписанные в треугольники APD и CPE , где P — точка пересечения отрезков AE и CD . Отличные от сторон касательные к ω_1 и ω_2 , проведенные из точки B , пересекают отрезки AE и CD в четырех точках, лежащих на одной окружности. Докажите, что окружности ω_1 и ω_2 равны.

2. Докажите, что число $\underbrace{800\dots01}_{n \text{ нулей}}$ не является квадратом натурального числа ни при одном натуральном n .

3. Может ли разность кубов двух линейных функций быть квадратным трехчленом, имеющим корни?

4. При каких парах натуральных чисел (m, n) все целые числа можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые два числа, отличающиеся на m или на n , были разноцветными?

5. В четырехугольнике $ABCD$ выполнены равенства $AB = BC$, $CD = DA$. Отрезки DK и BL — высоты треугольников ABD и BCD , соответственно. Докажите, что прямая KL проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.

6. Решите систему уравнений

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2, \quad \sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

7. Сколько существует 9-значных чисел, в которых встречаются все цифры от 1 до 9, таких, что вычеркиванием цифр из них можно получить число 12345, но нельзя — 123456?

8. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на три равновеликих попарно различных треугольника.

9. Расстановка чисел ± 1 в таблице 2007×2007 называется *миниатюрной*, если сумма чисел в любом квадрате, лежащем в таблице, равна -1 , 0 или 1 . Найдите количество миниатюрных расстановок.

10. Миша нарисовал на доске треугольник ABC и отметил его ортоцентр H . Оказалось, что на стороне AC существует точка X такая, что $XC = XH = XA/2$. Хулиган Андрей стер весь треугольник, кроме точек A и H . Помогите Мише восстановить его при помощи циркуля и линейки.